

Actualización de la Estimación de las Elasticidades de Recaudo Tributario a PIB y del PIB Tendencial

29 de abril de 2024

1. Introducción

La regla fiscal propuesta por la Ley 2155 de 2021 utiliza el PIB tendencial y las elasticidades del recaudo tributario no-petrolero para calcular el ciclo económico, CE_t , y con ello el Balance Primario Neto Estructural, $BPNE_t$. De acuerdo con lo establecido por la regla fiscal, el ciclo económico es uno de los componentes del balance primario neto (BPN_t) del Gobierno Nacional Central, junto con el $BPNE_t$, el ciclo petrolero y las transacciones netas por única vez.

El ciclo económico en un período t se calcula de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$CE_t = \left[1 - \left(\frac{Y_{t-1}^*}{Y_t} \right)^{\epsilon_{cuotas}} \right] * RT_{t,cuotas} + \sum_i \left[1 - \left(\frac{Y_t^*}{Y_t} \right)^{\epsilon_{i,no cuotas}} \right] * RT_{i,t,no cuotas} \quad (1)$$

Con i denotando cada uno de los impuestos no-petroleros diferentes a las cuotas del impuesto de renta; t es el año de análisis; $RT_{t,cuotas}$ es el recaudo tributario no-petrolero correspondiente a cuotas del impuesto de renta; $RT_{i,t,no cuotas}$ es el recaudo tributario no-petrolero diferente a las cuotas del impuesto de renta; Y_t^* es el PIB tendencial; Y_t es el PIB real; ϵ_{cuotas} es la elasticidad al PIB del recaudo tributario no-petrolero correspondiente a cuotas del impuesto de renta; y $\epsilon_{i,no cuotas}$ es la elasticidad al PIB del recaudo tributario no-petrolero diferente a las cuotas del impuesto de renta.

Es importante señalar que, de acuerdo con la ecuación 1, para calcular el ciclo económico, dado que el PIB real y el recaudo tributario no-petrolero, tanto de cuotas del impuesto de renta y los demás impuestos, son observables, es necesario estimar el PIB tendencial y las elasticidades de recaudo tributario. Por ende, en este documento se presentan la actualización de las metodologías de estimación y pronóstico del PIB tendencial y la estimación de las elasticidades de recaudo tributario a PIB.

El documento se estructura de la siguiente manera. La primera parte corresponde a esta introducción. En la segunda parte se presentan la metodología y resultados de las estimaciones de las elasticidades de recaudo tributario a PIB. En la tercera parte se presentan la metodología, estimaciones y proyecciones del PIB tendencial. Por último, en la cuarta parte se concluye.

2. Actualización de la Estimación de las Elasticidades de Recaudo Tributario a PIB¹

Formalmente, las elasticidades se definen como la respuesta del recaudo tributario a un cambio en el PIB:

$$\epsilon_{T_j,Y} = \frac{\partial T_j / T_j}{\partial Y / Y} \quad (2)$$

¹ De acuerdo con lo establecido en la Ley 2155, el CARF debe proveer estimaciones de las elasticidades de recaudo a PIB y del PIB tendencial al Ministerio de Hacienda cada año antes del 30 de abril.

Con $\epsilon_{T,j,Y}$ que indica el incremento porcentual del recaudo tributario del impuesto j ante un incremento de 1% en el PIB. De acuerdo con lo establecido en la ecuación del ciclo económico, estas elasticidades se deben distinguir entre cuotas y no-cuotas. Esto es resultado de las propiedades específicas que tiene cada tipo de recaudo. El recaudo por cuotas se refiere al cambio en el recaudo por impuesto de renta cuando aumenta el PIB. Este recaudo por cuotas de renta se calcula a partir del ingreso del periodo inmediatamente anterior. El recaudo por no-cuotas hace referencia a los ingresos percibidos por el Estado por concepto de impuestos diferentes al de renta y que, por definición, es calculado a partir del ingreso contemporáneo.

A. Estimaciones previas

La Dirección Técnica del Comité Autónomo de la Regla Fiscal, DT-CARF, realizó estimaciones de las elasticidades del recaudo tributario a PIB en los años 2022 y 2023². La Tabla 1 resume estos resultados.

Tabla 1. Estimaciones de elasticidades de recaudo tributario para Colombia.

Institución - Documento	División de Recaudo	Categoría de Recaudo	Tipo de Medición	Descomposición	Estimación 2022	Estimación 2023
DT-CARF	Recaudo cuotas	Neto	Nominal	No-petrolero	1,073	1,092
	Recaudo retenciones y resto	Neto	Nominal	No-petrolero	1,179	1,174

Fuente: DT-CARF.

B. Series de recaudo tributario

Para las estimaciones de los años 2022 y 2023 la DT-CARF utilizó las series de recaudo tributario neto no-petrolero. Estas series tenían una frecuencia anual y comenzaban en el año 1994. Sin embargo, se identificó la necesidad de contar con más datos para poder mejorar las estimaciones.

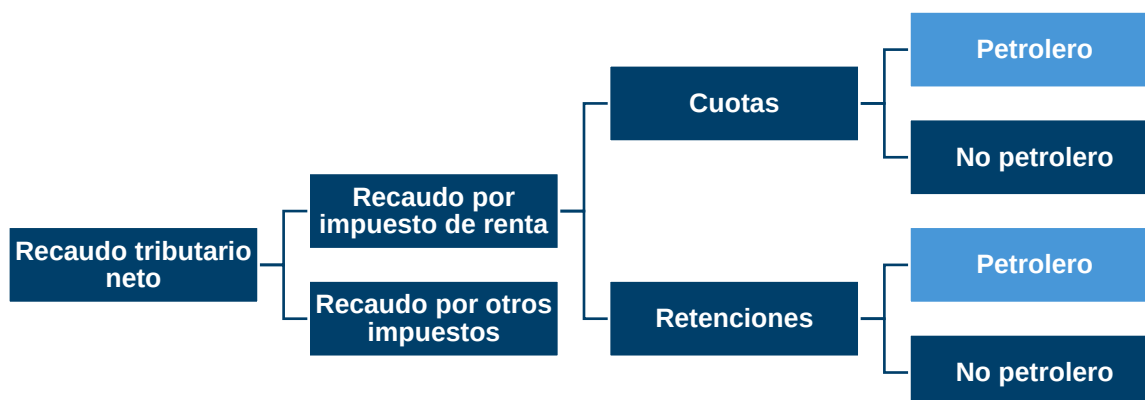
Las cifras de recaudo tributario tienen dos tipos de agregación. Por un lado, se tienen cifras del recaudo bruto que incluye el valor total de los impuestos recaudados por la autoridad tributaria, sin importar si estos se recaudan en efectivo o en Títulos de Devolución de Impuestos (TIDIS)³. La Dirección de Impuestos y Aduanas Nacionales (DIAN) es la entidad encargada de publicar la información del recaudo bruto por cada tipo de impuesto recaudado en el nivel nacional. Por otra parte, el recaudo neto se obtiene al descontar del recaudo bruto de la DIAN, el valor recaudado en papeles (TIDIS) y las devoluciones en efectivo solicitadas por los contribuyentes con saldos a favor. El Ministerio de Hacienda y Crédito Público (MHCP) publica información del recaudo neto en sus estadísticas fiscales, que son las cifras sobre las cuales se aplica la regla fiscal.

² Los documentos técnicos pueden ser consultados [aquí](#).

³ Cuando un gran contribuyente tiene derecho a una devolución de impuestos, ya sea porque le realizaron retenciones por un valor superior al valor de la obligación a pagar, o porque tiene derecho a una devolución de un impuesto (Ej.: el IVA en insumos de bienes exportados), la DIAN no le devuelve el dinero, sino que le paga en TIDIS. Estos son títulos son negociables en el mercado de valores y posteriormente pueden ser utilizados por los contribuyentes para pagarle obligaciones tributarias a la DIAN.

Para el cálculo de las elasticidades del recaudo tributario al PIB es necesario obtener el recaudo neto no petrolero, separando el componente correspondiente a cuotas del impuesto de renta del resto del recaudo no petrolero. Esto requiere identificar el impuesto de renta del sector petrolero neto, desagregado entre cuotas y retenciones, para restarlo a los componentes de cuota y retenciones del recaudo neto total (ver Gráfico 1).

Gráfico 1. Identificación del recaudo neto no petrolero.



Fuente: construcción propia.

A continuación, se describe la metodología para la construcción de las series de recaudo neto no petrolero desde 1987 a 2023, para lo cual fue necesario emplear dos fuentes de información:

Datos entre 1987 y 1993:

Para este periodo se tomó como fuente del recaudo tributario neto de todos los impuestos el incluido en las cifras fiscales históricas del documento "La política fiscal en el siglo XX en Colombia" (Junguito y Rincón, 2004⁴). Posteriormente, a esta serie se aplicaron los siguientes cálculos:

1. Para desagregar el impuesto de renta neto, tomado de Junguito y Rincón (2004) entre cuotas y retenciones, se usó la proporción observada de cada componente para cada año a partir del recaudo bruto publicado por la DIAN.
2. Para el impuesto de renta del sector petrolero, se partió del recaudo de renta de Ecopetrol de las cifras históricas de la empresa⁵. Con este monto, se extrapolaron al recaudo total del sector petrolero, asumiendo que la participación de la empresa en el sector se mantuvo en el promedio de la observado entre 1994-1998, que fue de 50% en promedio.
3. Para obtener el valor de cuotas y retenciones petroleras, se asumió que las cuotas en este sector pesaban 90%, valor similar al promedio observado entre 1994 y 1998.
4. El recaudo petrolero por cuotas y retenciones, se restó al recaudo total, obteniendo así la serie de recaudo neto no petrolero separado entre cuotas y resto.

⁴ Disponible en: <https://www.banrep.gov.co/docum/ftp/borra318.pdf>

⁵ Disponible en: <http://www.ecopetrol.com.co/especiales/estadisticas2005/estadisticas-monetarias/transferencias-al-estado.htm>

Datos entre 1994 y 2023:

Al igual que en las estimaciones realizadas en 2022 y 2023, para este periodo se utilizó la información de la Dirección de Impuestos y Aduanas Nacionales (DIAN) y del Ministerio de Hacienda y Crédito Público (MHCP). Para obtener el recaudo neto no petrolero se realizaron los siguientes cálculos:

1. Se obtuvo la información de los sectores de extracción de petróleo crudo y gas de los agregados de las declaraciones tributarias del impuesto de renta de personas jurídicas para los años 1994 a 1999. De estos agregados, se tomó el valor del renglón de impuesto a cargo (FU) para el dato de las cuotas del impuesto, y el renglón de retenciones para el resto del impuesto. Con estos dos valores se calculó el recaudo bruto del sector petrolero.
2. Para obtener el recaudo neto del sector, se calculó el valor del recaudo en papeles y devoluciones como la diferencia entre el saldo a favor en el año gravable t-1 menos el renglón de saldo a favor en el año gravable t. Este valor se restó del valor de cada componente del recaudo bruto del sector (cuotas y retenciones), aplicando la participación de cada rubro sobre el recaudo bruto (Ej. cuotas sector petróleo neto=cuotas bruto-(devoluciones*cuotas/total renta)).
3. Los datos de renta petrolera neta, por cuotas y retenciones, se restan del recaudo total para obtener los datos de recaudo no petrolero.

C. Metodología de estimación

En los años 2022 y 2023 la metodología de estimación utilizada fue la de Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles, MCGF. El uso de esta metodología requería el cumplimiento del supuesto de cointegración de las series de recaudo y de PIB, de lo contrario las estimaciones serían espurias. Sin embargo, con la incorporación de los datos de 2023 y los ajustes en el PIB por parte del DANE, las series no pasan el test de cointegración con la muestra desde 1994. Por esta razón, se decidió cambiar la metodología de estimación.

La metodología propuesta sigue la idea de cointegración propuesta por Engle & Granger (1987) incorporando una tercera etapa a la estimación, siguiendo la propuesta de Engle & Yoo (1987)⁶. El objetivo es que con este procedimiento se solucionen los potenciales problemas de ineficiencia y de inferencia. Esta metodología, al requerir del cumplimiento del supuesto de cointegración, evita que los resultados de la regresión sean espurios. Adicionalmente, con la ampliación de la muestra de estimación se garantizarían dos objetivos. El primero, que las series estén cointegradas y, el segundo, que los estimadores no sean sesgados por el tamaño muestral. El procedimiento está constituido por tres etapas. En la primera etapa se estima un modelo en niveles de la siguiente forma:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \epsilon_t \quad (3)$$

Con Y_t la variable dependiente, β_0 una constante, β_1 el parámetro de interés que se busca estimar y ϵ_t el término de error de la primera etapa. La segunda etapa, que corresponde al modelo de

⁶ Adicionalmente, en el Anexo 4 se presentan los resultados de otra metodología de estimación que la DT-CARF ha comenzado a evaluar, el modelo ARDL.

corrección de error, MCE, se estima por mínimos cuadrados ordinarios, MCO, y formalmente viene definido de la siguiente manera:

$$\Delta Y_t = \mu_1 + (\phi_{11,1}\Delta Y_{t-1} + \dots + \phi_{11,p}\Delta Y_{t-p}) + (\phi_{12,1}\Delta X_{t-1} + \dots + \phi_{12,p}\Delta X_{t-p}) - \alpha_1 \hat{\epsilon}_{t-1} + v_t \quad (4)$$

Donde las variables con el símbolo Δ denotan las primeras diferencias, $\hat{\epsilon}_{t-1}$ es el termino de corrección de error y v_t denota los errores de la segunda etapa. En la tercera etapa se toman los errores estimados de la segunda etapa, $\hat{v}_t$ y se regresan contra el producto del coeficiente estimado de la velocidad de ajuste, $\hat{\alpha}_1$, y la variable independiente de la primera etapa, X_t .

$$\hat{v}_t = \delta(\hat{\alpha}_1 X_t) + u_t \quad (5)$$

Finalmente, la estimación corregida del parámetro de interés de la primera etapa, $\hat{\beta}_1^1$, corresponderá a:

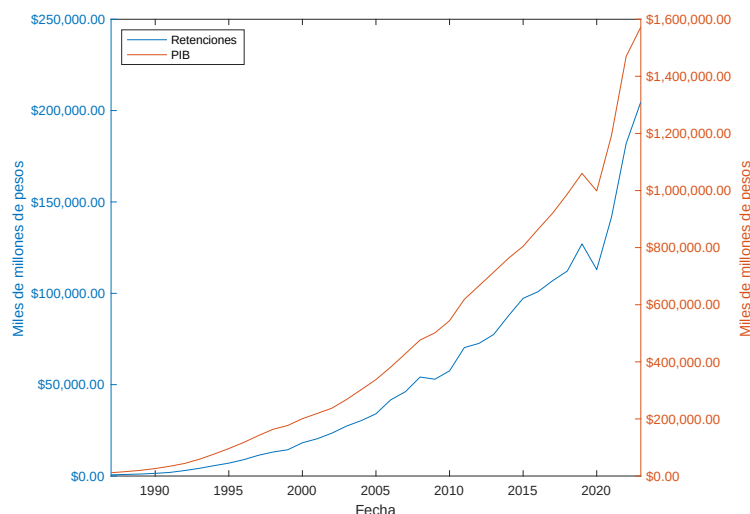
$$\hat{\beta}_1^3 = \hat{\beta}_1^1 + \hat{\delta} \quad (6)$$

Para que las series estén cointegradas, los errores de la primera etapa deben ser estacionarios aplicando la prueba de raíz unitaria de Dickey-Fuller aumentada comparada contra los valores críticos de MacKinnon (1996). Adicionalmente, los errores de la segunda etapa deben ser ruido blanco y si los errores de la primera etapa son normales, se pueden construir los intervalos de confianza de $\hat{\beta}_1^3$ de la forma usual.

i. Modelo para retenciones y resto de impuestos

El Gráfico 2 muestra el comportamiento de la serie de recaudo por resto de impuesto contra el PIB nominal. Los resultados sugieren la posible existencia de una relación de cointegración entre las dos series.

Gráfico 2. Recaudo por retenciones y otros Impuestos.



Fuente: DIAN y cálculos propios.

Para aplicar la metodología propuesta, las series no deben ser estacionarias. Los resultados de las pruebas de estacionariedad se presentan en el Anexo 1. Formalmente, el modelo estimado se describe a continuación. La primera etapa de la estimación corresponderá a:

$$\ln T_t^R = \beta_0^R + \beta_1^R \ln Y_t + \epsilon_t^R \quad (7)$$

Con $\ln T_t^R$ el logaritmo natural del recaudo por el resto de impuestos, $\ln Y_t$ el logaritmo natural del PIB nominal, ϵ_t^R los errores de la primera etapa y β_1^R la elasticidad del recaudo por resto de impuestos a PIB. La segunda etapa vendrá determinada por:

$$\Delta \ln T_t^R = \alpha_1^R \Delta \ln Y_t + \alpha_2^R \hat{\epsilon}_{t-1}^R + v_t^R \quad (8)$$

Con $\Delta \ln T_t^R$ la primera diferencia del logaritmo del recaudo por el resto de impuestos, $\Delta \ln Y_t$ la primera diferencia del logaritmo natural del PIB nominal, $\hat{\epsilon}_{t-1}^R$ es el termino de corrección de error y v_t^R denota los errores de la segunda etapa. La tercera etapa corresponderá a:

$$\hat{v}_t^R = \delta^R (\hat{\alpha}_2^R \ln Y_t) + u_t^R \quad (9)$$

Y la elasticidad del resto de impuestos al PIB vendrá definida por:

$$\beta_{Resto} = \hat{\beta}_1^R + \hat{\delta}^R \quad (10)$$

Los resultados de la prueba de cointegración de la primera etapa se presentan en la Tabla 2:

Tabla 2. Resultados de la prueba de cointegración.

Prueba	Estadístico	Valor crítico	p Valor
H_0 : no cointegración	-3,4640	-3,5094	0,0550(*)

Fuente: cálculos propios.

Los resultados de la prueba de cointegración de Engle & Granger sugieren que existe cointegración entre el recaudo del resto de impuestos y el PIB al 10%. Por consiguiente, los resultados de las estimaciones de la primera etapa serán:

Tabla 3. Resultados de la primera etapa.

Coefficiente	Estimación	SE	t	p Valor
β_0	-5,9552	0,1336	-44,5886	1,9775e-32
β_1	1,1849	0,0068871	172,05	7,7908e-53

Fuente: cálculos propios.

Lo anterior sugiere que el coeficiente de interés tiene un valor de 1,1849. Los resultados de las estimaciones de la segunda etapa son:

Tabla 4. Resultados de la segunda etapa.

Coefficiente	Estimación	SE	t	p Valor
α_1	1,1407	0,043692	26,108	4,4528e-24
α_2	-0,43306	0,1351	-3,2056	0,0029303

Fuente: cálculos propios.

Estos resultados sugieren que la velocidad de ajuste del modelo de corrección de error es de -0,43306. En el Anexo 2 se presentan los resultados de la prueba de Ljung-Box aplicada a los errores de la segunda etapa. Finalmente, los resultados de la tercera etapa son:

Tabla 5. Resultados de la tercera etapa.

Coeficiente	Estimación	SE	t	p Valor
δ	-0,00024614	0,00082008	-0,30014	0,76585

Fuente: cálculos propios.

En este orden de ideas, la estimación de la elasticidad del resto de impuestos será:

$$\beta_{Resto} = 1,1847 \quad (11)$$

En el Anexo 3 se presentan los resultados de las pruebas de normalidad a los errores de la primera etapa. Dado que estos errores son normales, esto posibilita la construcción del intervalo de confianza de la elasticidad:

Tabla 6. Elasticidad del resto de impuestos a PIB.

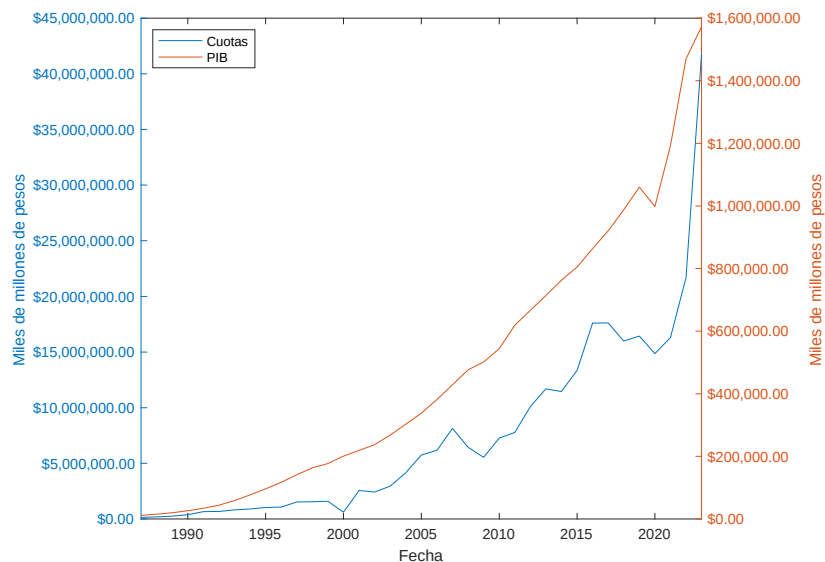
Cota inferior (95%)	Estimación puntual	Cota superior (95%)
1,1707	1,1847	1,1989

Fuente: cálculos propios.

ii. Modelo para cuotas de renta

El Gráfico 3 muestra el comportamiento de la serie de recaudo por cuotas de renta contra el PIB nominal. Se resaltan dos cosas. La primera, las dos series parecen ser $I(1)$ y, por consiguiente, podrían estar cointegradas. La segunda, existe un quiebre en la serie de recaudo en el año 2000 presumiblemente por los efectos de la crisis de fin de siglo.

Gráfico 3. Recaudo por cuotas de renta.



Fuente: DIAN y cálculos propios.

En el Anexo 1 se muestran los resultados de las pruebas de raíz unitaria sobre las series. Dado que las series no son estacionarias, se puede proceder al análisis de cointegración. Formalmente, en la etapa 1 se estima el siguiente modelo en niveles:

$$\ln T_t^C = \beta_0^C + \beta_1^C \ln Y_{t-1} + \beta_2^C t + \epsilon_t^C \quad (12)$$

Con $\ln T_t^C$ el logaritmo natural del recaudo por cuotas de renta, $\ln Y_{t-1}$ el logaritmo natural del PIB nominal, t una tendencia determinística, ϵ_t^C los errores de la primera etapa y β_1^C la elasticidad del recaudo por cuotas de renta a PIB. La segunda etapa será:

$$\Delta \ln T_t^C = \alpha_1^C \Delta \ln Y_{t-1} + \alpha_2^C \hat{\epsilon}_{t-1}^C + \alpha_3^C D_t + v_t^C \quad (13)$$

Con $\Delta \ln T_t^C$ la primera diferencia del logaritmo del recaudo por cuotas de renta, $\Delta \ln Y_{t-1}$ la primera diferencia del logaritmo natural del PIB nominal, $\hat{\epsilon}_{t-1}^C$ es el termino de corrección de error, D_t una variable dicótoma que toma el valor de 1 en el año 2000 y 0 en caso contrario para tener en cuenta el cambio estructural observado en la serie de recaudo en este periodo y v_t^C denota los errores de la segunda etapa. La tercera etapa corresponderá a:

$$\hat{v}_t^C = \delta^C (\hat{\alpha}_2^C \ln Y_t) + u_t^C \quad (14)$$

La elasticidad de las cuotas de renta será:

$$\beta_{Cuotas} = \hat{\beta}_1^C + \hat{\delta}^C \quad (15)$$

Los resultados de la prueba de cointegración de la primera etapa se presentan en la Tabla 7:

Tabla 7. Resultados de la prueba de cointegración.

Prueba	Estadístico	Valor crítico	p Valor
H_0 : no cointegración	-4,1377	-3,9836	0,0364

Fuente: cálculos propios.

Los resultados de la prueba de cointegración de Engle & Granger sugieren que existe cointegración entre las cuotas de renta y el PIB a un nivel de significancia estadística del 5% y del 10%. Por consiguiente, los resultados de las estimaciones de la primera etapa serán:

Tabla 8. Resultados de la primera etapa.

Coefficiente	Estimación	SE	t	p Valor
β_0	-0,8854	1,7059	-0,51902	0,60711
β_1	0,79416	0,10159	7,8176	4,2416e-09
β_2	0,034962	0,013473	2,595	0,013862

Fuente: cálculos propios.

Lo anterior sugiere que la elasticidad tiene un valor de 0,79416. Los resultados de las estimaciones de la segunda etapa son:

Tabla 9. Resultados de la segunda etapa.

Coefficiente	Estimación	SE	t	p Valor
α_1	1,1439	0,18137	6,3067	3,923e-07
α_2	-0,27983	0,099008	-2,8263	0,0079355
α_3	-1,171	0,18437	-6,3514	3,4429e-07

Fuente: cálculos propios.

Estos resultados sugieren que la velocidad de ajuste del modelo de corrección de error es de -0,27983. En el Anexo 2 se presentan los resultados de la prueba de Ljung-Box aplicada a los

errores de la segunda etapa. Dado que los errores de la segunda etapa son ruido blanco, los resultados de la tercera etapa son:

Tabla 10. Resultados de la tercera etapa.

Coeficiente	Estimación	SE	t	p Valor
δ	-0,00071653	0,0053077	-0,135	0,89339

Fuente: cálculos propios.

En este orden de ideas, la estimación de la elasticidad de las cuotas de renta será:

$$\beta_{Cuotas} = 0,7934 \quad (16)$$

En el Anexo 3 se presentan los resultados de la prueba de normalidad aplicada a los errores de la primera etapa. Teniendo en cuenta que son normales, esto posibilita la construcción del intervalo de confianza de la elasticidad:

Tabla 11. Elasticidad de las cuotas de renta a PIB.

Cota inferior (95%)	Estimación puntual	Cota superior (95%)
0,5870	0,7934	0,9999

Fuente: cálculos propios.

D. Resumen estimaciones

La Tabla 12 resume los resultados de las estimaciones de las elasticidades.

Tabla 12. Estimaciones de elasticidades de recaudo tributario 2024.

División de Recaudo	Categoría de Recaudo	Tipo de Medición	Descomposición	Estimación
Recaudo cuotas	Neto	Nominal	No-petrolero	0,7934
Recaudo retenciones y resto	Neto	Nominal	No-petrolero	1,1847

Fuente: DT-CARF.

3. PIB tendencial

En esta sección se presenta la actualización de la metodología y resultados de las estimaciones del PIB tendencial. El producto tendencial de la economía se modela a partir de una función de producción tipo Cobb-Douglas en la forma:

$$\bar{Y}_t = \bar{A}_t \bar{K}_t^\alpha \bar{L}_t^{1-\alpha} \quad (17)$$

Con $\bar{Y}_t$ el PIB tendencial, $\bar{K}_t$ el capital tendencial, $\bar{L}_t$ el trabajo tendencial, $\bar{A}_t$ la productividad tendencial y α la participación del capital en el producto total. El capital tendencial se calculará como:

$$\bar{K}_t = K_t NAICU_t \quad (18)$$

Con K_t el stock de capital de la economía y $NAICU_t$ que denota la tasa de utilización de capacidad instalada que no acelera la inflación o “Non-accelerating inflation capacity utilization” por sus siglas en inglés. El trabajo tendencial será calculado como:

$$\bar{L}_t = \overline{PEA}_t(1 - NAIRU_t) \quad (19)$$

Con $\overline{PEA}_t$ que denota la tendencia de la PEA, población económicamente activa y $NAIRU_t$ la tasa de desempleo que no acelera la inflación o “*Non-accelerating inflation rate of unemployment*” por sus siglas en inglés. Finalmente, la productividad tendencial es calculada como la tendencia de:

$$A_t = \frac{Y_t}{(K_t UCI_t)^\alpha [\overline{PEA}_t(1 - U_t)]^{1-\alpha}} \quad (20)$$

Con Y_t el PIB real, UCI_t la utilización de capacidad instalada, $\overline{PEA}_t$ la población económicamente activa y U_t la tasa de desempleo.

i. Capital

A continuación se describen los supuestos y fuentes de información para cada variable involucrada en el cálculo del factor capital. Para el stock de capital se utilizaron las series de acervo de capital neto publicadas por el DANE. El cálculo de estas series sigue el estándar internacional de LAKLEMS⁷. Esta serie tiene una periodicidad anual y se cuenta con disponibilidad de información desde 1990 hasta 2022.

La tasa de depreciación, δ , es calculada a partir de la información publicada en la última versión de las Penn World Tables (PWT 10,01). Se tomó el valor promedio de los valores del periodo 2000-2019 que corresponde a $\bar{\delta} = 3,6\%$ ⁸. Adicionalmente, la participación del capital en el producto, α , se tomó como el complemento de la participación del trabajo en el producto. Este valor es el promedio entre 2000 y 2019 que proviene de PWT 10,01 y tiene un valor de 0,48, con lo cual $\alpha = 0,52$.

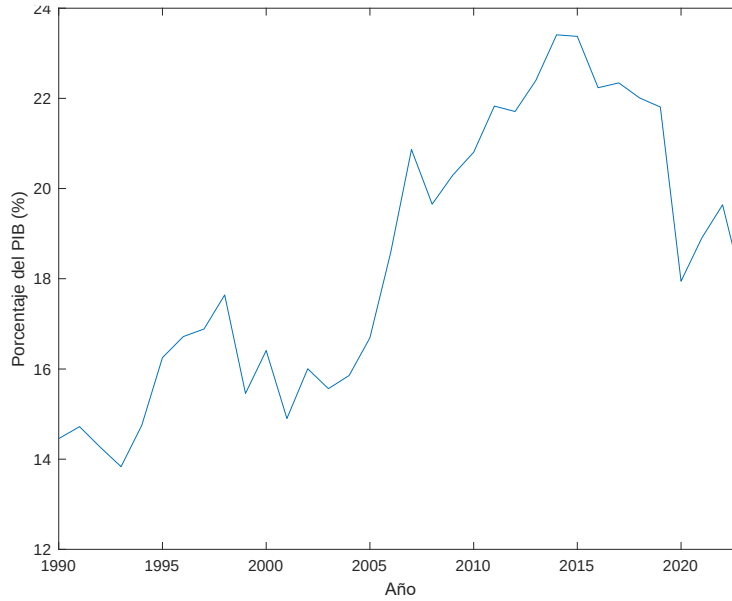
La utilización de capacidad instalada es el insumo fundamental para el cálculo del capital efectivamente utilizado, así como para la estimación de la NAICU. La fuente de información utilizada corresponde a los datos publicados por Fedesarrollo en la Encuesta de Opinión Empresarial.

En la tasa de inversión, como se muestra en el Gráfico 4, la misma ha tenido una caída sostenida en los últimos años. Teniendo en cuenta este comportamiento, se decidió proseguir de la siguiente manera. Para el año 2024 se asume en 18,4% y en 2025 en 18,6%, en línea con la corrección esperada al alza de esta variable. También esto se debe al efecto base de 2023 que fue de 17,8%. Para 2026 se espera que sea de 19% y de 2027 en adelante se ubicaría en 19,2% del PIB, alineado con un crecimiento más estable que converge hacia el crecimiento tendencial.

⁷ La metodología puede ser calculada [aquí](#).

⁸ Se utiliza esta tasa de depreciación debido a que LAKLEMS presenta una tasa de depreciación por cada rama de actividad económica y por cada tipo de activo, pero no presenta un resultado agregado para la economía.

Gráfico 4. Tasa de inversión.



Fuente: DANE y cálculos propios.

Teniendo en cuenta los supuestos anteriores, se puede construir la cifra del stock de capital en 2023 y se puede proyectar la serie desde 2024 hasta 2035 a partir de la ecuación de movimiento del capital.

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t \quad (21)$$

a. NAICU

El modelo de estimación de la NAICU sigue la metodología propuesta en Nigrinis (2004). Este modelo considera una representación de espacio-estado donde las variables no-observables son la NAICU y la brecha de utilización de capacidad instalada. Luego el modelo es estimado a través de un filtro de Kalman. Formalmente, la ecuación de interés será:

$$\mu_t = \mu_t^* + \hat{\mu}_t + \theta d_t + \varrho_1 \epsilon_t \quad (22)$$

Con μ_t la utilización de capacidad instalada, μ_t^* la NAICU, $\hat{\mu}_t$ la brecha de utilización de capacidad instalada, d_t una variable dummy que toma el valor de 1 para los trimestres 1 y 2 de 2020 y 0 en caso contrario, para controlar por el cambio estructural producto de la pandemia, y ϵ_t las innovaciones.

La NAICU, μ_t^* , seguirá un proceso AR(1) en la forma:

$$\mu_t^* = \mu_{t-1}^* + \varrho_2 v_t^{\mu^*} \quad (23)$$

Con $v_t^{\mu^*}$ el error. La brecha de la utilización de capacidad instalada, $\hat{\mu}_t$, seguirá un proceso AR(2) en la forma⁹:

$$\hat{\mu}_t = \alpha_1 \hat{\mu}_{t-1} + \alpha_2 \hat{\mu}_{t-2} + \varrho_3 v_t^{\hat{\mu}} \quad (24)$$

Con $v_t^{\hat{\mu}}$ el error. La curva de Phillips, que estará definida a partir de la inflación básica, π_t^b , estará descrito por la ecuación:

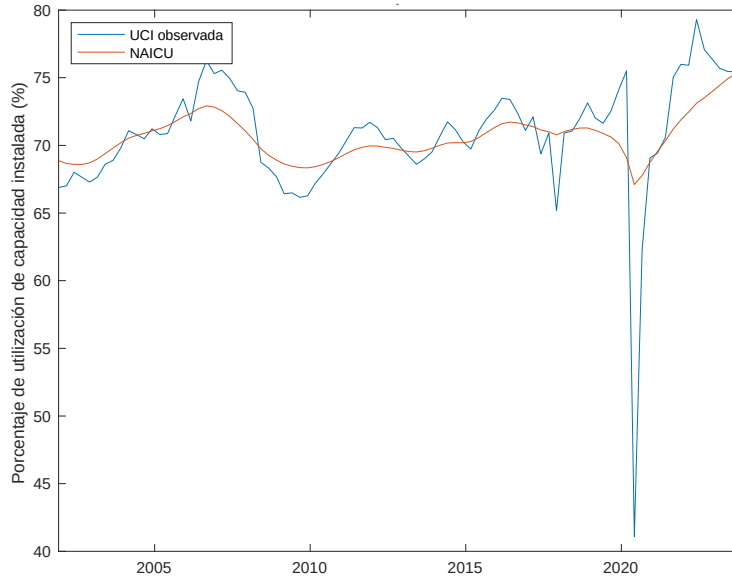
$$\pi_t^b = \alpha_3 \hat{\mu}_{t-1} + \alpha_4 \pi_{t-1}^b + \alpha_5 \pi_{t-2}^M + \varrho_4 v_t^{\pi^b} \quad (25)$$

Con $\alpha_3 > 0$, π_{t-2}^M la inflación de importados y $v_t^{\pi^b}$ el error. Y la inflación de importados, π_{t-1}^M , seguirá un proceso AR(1) en la forma:

$$\pi_{t-1}^M = \alpha_6 \pi_{t-2}^M + \varrho_5 v_t^{\pi^M} \quad (26)$$

En el Anexo 5 se presenta el algoritmo utilizado para estimar las variables no-observables y en el Anexo 6 se presentan los resultados de las estimaciones de la NAICU. El Gráfico 5 muestra el comportamiento de la UCI y de la NAICU.

Gráfico 5. NAICU

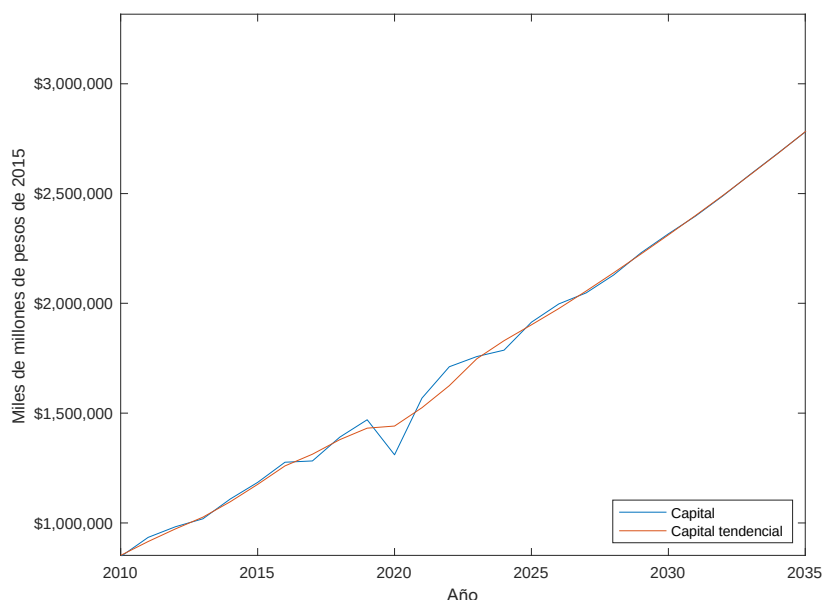


Fuente: cálculos propios.

El Gráfico 6 muestra el comportamiento de las series de capital y capital tendencial en el periodo observado y en la senda de pronóstico.

⁹ Nigrinis (2004) utiliza esta especificación AR(2) siguiendo a Conway & Hunt (1997). Estos autores muestran que utilizando un proceso AR(2) en el componente cíclico se puede simular un ciclo económico de 8 años, aproximadamente.

Gráfico 6. Capital



Fuente: DANE y cálculos propios.

ii. Trabajo

Para el cálculo del capital tendencial se realizan los siguientes supuestos. Los datos de la población económicamente activa, PEA, provienen de las estadísticas de mercado laboral del DANE. La tasa de desempleo corresponde al total nacional y también proviene de las estadísticas de mercado laboral del DANE.

Los pronósticos de la PEA para los años 2024 y 2025 provienen de las proyecciones de la OCDE¹⁰. Desde 2026 en adelante, la PEA se pronóstica a partir del comportamiento de la TGP, Tasa Global de Participación, y la PET, Población en Edad de Trabajar. La TGP se pronóstica como el promedio de los últimos 10 años, que fue de 64,85%¹¹. La PET se pronóstica a partir de las proyecciones de población del DANE para la población con edad ≥ 15 años. No obstante, al contrastar el nivel proyectado de esta población con los niveles observados en las estadísticas de mercado laboral, se observa que el pronóstico ha estado por encima del nivel real. Por esta razón se prefirió imputar las tasas de crecimiento proyectadas a los valores reales y evitar de este modo un salto brusco en la serie.

a. NAIRU

Para la NAIRU se proponen dos modelos. El primer modelo sigue una especificación similar a la propuesta en Gómez & Julio (2000). El segundo modelo corresponde al de Ball & Mankiw (2002).

¹⁰ Las proyecciones pueden ser consultadas [aquí](#).

¹¹ La TGP cayó sostenidamente entre 2014 y 2020. En 2014 fue de 67,43% y en 2020 llegó a 60,4%. Sin embargo, a partir de 2021 comenzó a recuperarse y en 2023 se ubicó en 64,1%. Por esta razón se decidió adoptar este supuesto, pues parece realista de cara a las dinámicas demográficas actuales y al comportamiento del mercado laboral.

La NAIRU se obtiene como el promedio aritmético simple de las estimaciones obtenidas por las dos metodologías.

Modelo 1

El primer modelo propuesto sigue una metodología similar a la de Gómez & Julio (2000). En este modelo se hace una representación de espacio-estado en donde las variables no-observables son la NAIRU y la brecha de desempleo y luego es estimado a través de un filtro de Kalman. Formalmente, la ecuación de interés es:

$$u_t = u_t^* + \hat{u}_t + \vartheta_1 \epsilon_t^u \quad (27)$$

Con u_t la tasa de desempleo, u_t^* la NAIRU, $\hat{u}_t$ la brecha del desempleo y ϵ_t^u las innovaciones. La NAIRU, u_t^* , sigue un proceso AR(1):

$$u_t^* = \beta_1 u_{t-1}^* + \vartheta_2 v_t^{u^*} \quad (28)$$

Con $v_t^{u^*}$ el termino de error. La brecha del desempleo, $\hat{u}_t$, sigue un proceso AR(1) en la forma:

$$\hat{u}_t = \beta_2 \hat{u}_{t-1} + \vartheta_3 v_t^{\hat{u}} \quad (29)$$

Con $v_t^{\hat{u}}$ el termino de error. La curva de Phillips se define a partir de la inflación total, π_t , a través de la siguiente expresión:

$$\pi_t = \beta_3 \hat{u}_{t-1} + \beta_4 \pi_{t-1} + \beta_5 \pi_{t-2} + \beta_6 s_{t-1} + \beta_7 s_{t-2} + \beta_8 \pi_{t-1}^M + \vartheta_4 v_t^\pi \quad (30)$$

Con $\beta_3 < 0$, s_t son los choques de oferta, definidos como $s_t = \pi_t^F - \pi_t$ con π_t^F la inflación de alimentos, π_t^M la inflación de importados y v_t^π el termino de error. Los choques de oferta seguirán un proceso AR(2):

$$s_t = \beta_9 s_{t-1} + \beta_{10} s_{t-2} + \vartheta_5 v_t^s \quad (31)$$

Con v_t^s denotando el termino de error. La inflación de importados seguirá un proceso AR(1) en la forma:

$$\pi_t^M = \beta_{11} \pi_{t-1}^M + \vartheta_6 v_t^{\pi^M} \quad (32)$$

En el Anexo 5 se presenta el algoritmo de estimación que fue utilizado y en el Anexo 7 se describe con mayor detalle el modelo de la NAIRU.

Modelo 2

Este modelo sigue la metodología propuesta en Ball & Mankiw (2002). En esta aproximación se parte del supuesto de una inflación estable. Se estima una curva de Phillips en la forma:

$$\pi_t = E(\pi_t) - \alpha(u_t - \bar{u}_t) + \mu_t \quad (33)$$

Con π_t la inflación, $E(\pi_t)$ la inflación esperada, $\bar{u}_t$ la NAIRU, u_t la tasa de desempleo, μ_t los choques de oferta y $\alpha > 0$ un coeficiente de ajuste. Asumiendo que α es conocido y reordenando términos se obtiene:

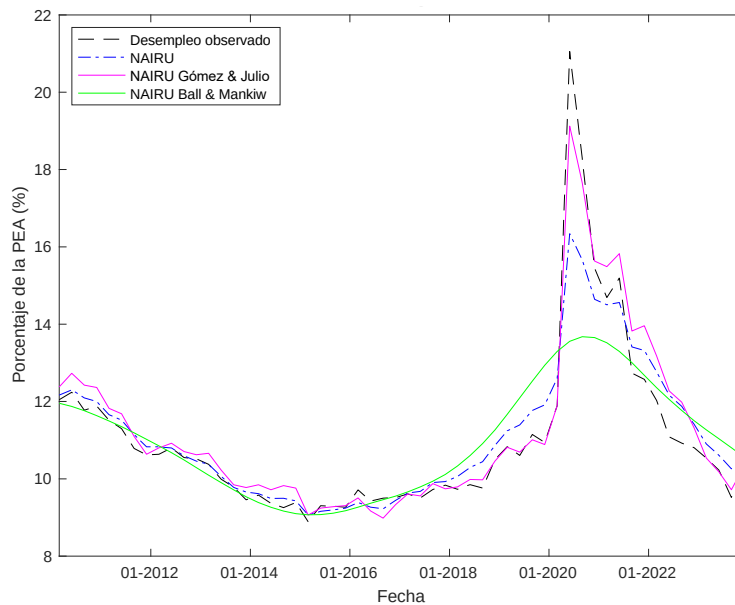
$$\bar{u}_t + \frac{\mu_t}{\alpha} = u_t + \frac{\pi_t - E(\pi_t)}{\alpha} \quad (34)$$

El término de la derecha es conocido, por lo cual la NAIRU corresponderá al componente tendencial de $u_t + \frac{\pi_t - E(\pi_t)}{\alpha}$. El coeficiente α se estima a partir de una regresión por mínimos cuadrados ordinarios, MCO, de la ecuación:

$$\Delta\pi_t = \alpha_0 + \alpha u_t + \epsilon_t \quad (35)$$

Los resultados de la estimación se muestran en el Anexo 8. El Gráfico 7 muestra el comportamiento de los dos modelos estimados de la NAIRU y de la tasa de desempleo.

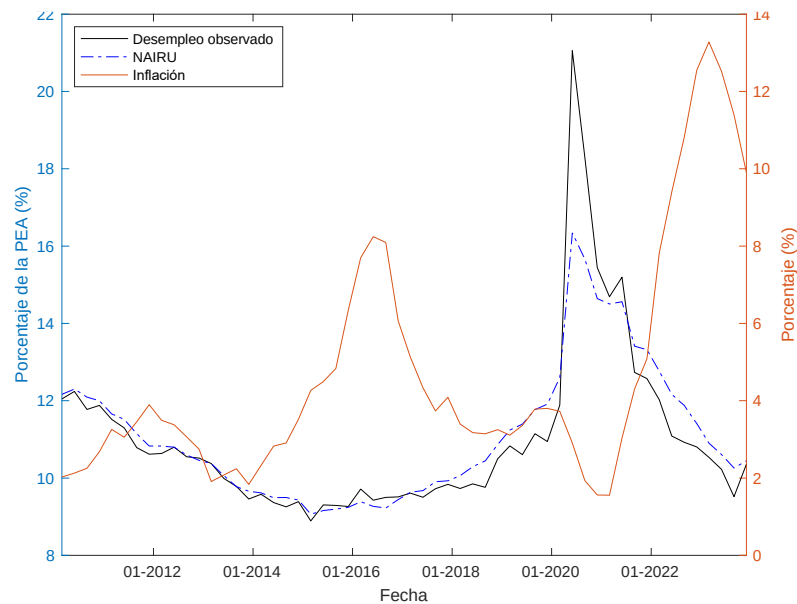
Gráfico 7. NAIRU



Fuente: DANE y cálculos propios.

El Gráfico 8 muestra el comportamiento de la NAIRU tomada como el promedio de ambos modelos, comparada con el desempleo observado y la inflación.

Gráfico 8. NAIRU e inflación



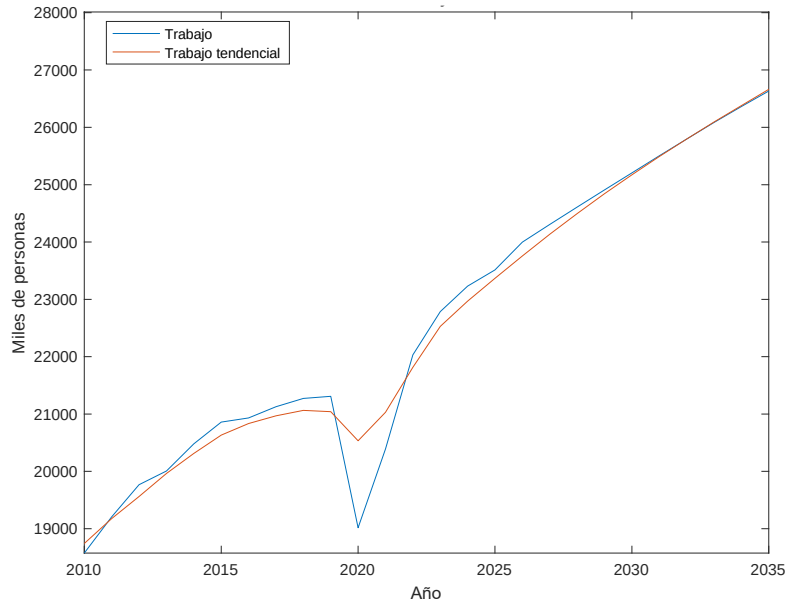
Fuente: DANE y cálculos propios.

El modelo reproduce bien el tramo 2010 - 2014 en donde la inflación estuvo en su rango objetivo, razón por la cual la NAIRU y el desempleo fueron muy similares. En el periodo de 2014 en adelante recoge de forma muy ligera este incremento de la inflación. La razón es que este periodo coincide con la caída de los precios del petróleo y el fenómeno del niño, por definición, choques de oferta. Teóricamente la NAIRU debe responder ante choques de demanda agregada.

Algo similar sucede con el periodo de pandemia. Si bien la NAIRU también aumenta como el desempleo debido al fuerte choque de oferta, no supera la tasa de desempleo observada. En el periodo postpandemia, se supera la tasa de desempleo debido a la fuerte política económica expansiva que generó presiones de demanda, así como a factores externos que tradicionalmente han afectado la inflación en Colombia, IMF (2023).

Finalmente, el Gráfico 9 muestra el comportamiento del factor trabajo y el trabajo tendencial en el periodo observado y en la senda de pronóstico.

Gráfico 9. Trabajo



Fuente: DANE y cálculos propios.

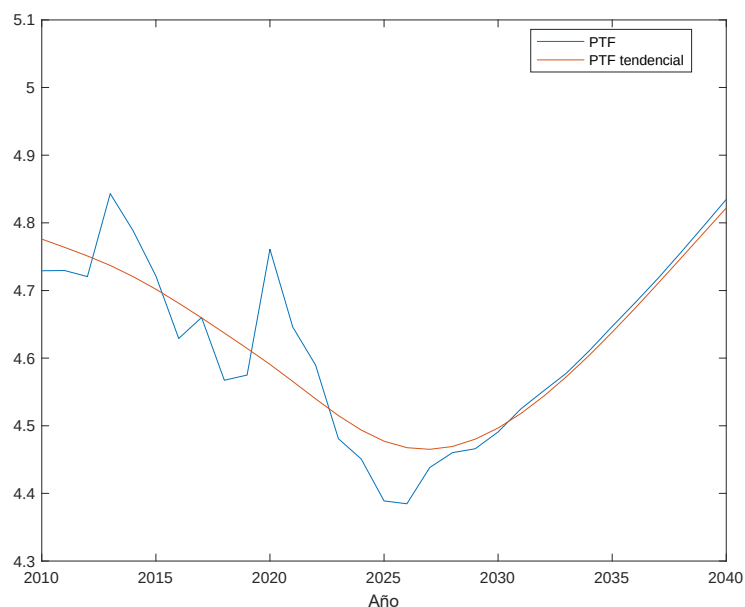
iii. Productividad total de los factores

La productividad total de los factores, PTF, o residuo de Solow, se calcula como el componente tendencial de la expresión:

$$A_t = \frac{Y_t}{(K_t UCI_t)^\alpha [PEA_t(1 - U_t)]^{1-\alpha}} \quad (36)$$

El Gráfico 10 muestra el comportamiento de la PTF y su componente tendencial en el periodo observado y en el horizonte de pronóstico. El componente tendencial es calculado aplicando un filtro de Hodrick-Prescott.

Gráfico 10. Productividad total de los factores



Fuente: cálculos propios.

Nota: la unidad de medida de la PTF depende de las unidades de medida del capital y del trabajo. La primera siendo miles de millones de pesos de 2015 y la segunda miles de personas.

iv. Resultados

La Tabla 13 muestra los resultados de las estimaciones y pronóstico del PIB tendencial en el horizonte 2020 – 2034 así como su tasa de crecimiento. Finalmente, el Gráfico 11 muestra el comportamiento en niveles del PIB real y del PIB tendencial en el horizonte de pronóstico.

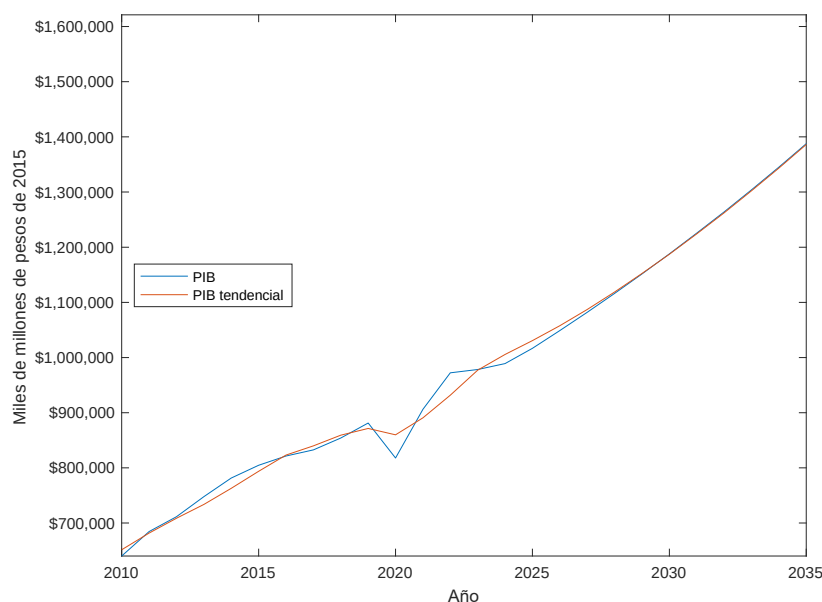
Tabla 13. PIB tendencial y su crecimiento, 2020-2034
Miles de millones de 2015

Año	PIB Tendencial CARF		Crecimiento PIB Tendencial CARF
2020	\$	859.785	-1,33%
2021	\$	890.748	3,60%
2022	\$	931.691	4,60%
2023	\$	977.312	4,90%
2024	\$	1.005.566	2,89%
2025	\$	1.030.679	2,50%
2026	\$	1.057.604	2,61%
2027	\$	1.087.116	2,79%
2028	\$	1.118.803	2,91%
2029	\$	1.152.207	2,99%
2030	\$	1.187.315	3,05%

Año	PIB Tendencial CARF		Crecimiento PIB Tendencial CARF
2031	\$	1.224.075	3,10%
2032	\$	1.262.410	3,13%
2033	\$	1.302.242	3,16%
2034	\$	1.343.505	3,17%
2035	\$	1.386.130	3,17%

Fuente: cálculos propios.

Gráfico 11. PIB tendencial



Fuente: cálculos propios.

4. Conclusiones

En este documento se presentaron las metodologías de estimación de las elasticidades de recaudo a PIB y la actualización de los resultados de PIB tendencial. En las elasticidades se abordó una metodología más robusta, la aproximación de Engle & Yoo. Esta metodología proporcionó resultados mucho más confiables debido a la ampliación de la muestra y a que el procedimiento permite corregir potenciales sesgos en las estimaciones.

Las estimaciones sugieren una elasticidad de retenciones y otros impuestos de 1,1847 y de cuotas de renta de 0,7934. Adicionalmente, se avanzó en la aplicación de otra metodología de series de tiempo que se presenta en el Anexo 4, el modelo ARDL, el cual muestra que los resultados son robustos y no difieren estadísticamente.

Desde el lado del PIB tendencial se actualizó la metodología de la función de producción con supuestos más sólidos para el mediano plazo, así como se robustecieron las metodologías de

estimación de la NAIRU y de la NAICU. Los resultados sugieren una convergencia del PIB tendencial a un crecimiento de 3,17% en el mediano plazo.

Bibliografía

1. Ball, L., & Mankiw, N. G. (2002). The NAIRU in theory and practice. *Journal of Economic Perspectives*, 16(4), 115-136.
2. Durbin, J., & Koopman, S. J. (2012). *Time series analysis by state space methods* (Vol. 38). OUP Oxford.
3. Engle, R. F., & Granger, C. W. (1987). Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, 251-276.
4. Engle, R. F., & Yoo, B. S. (1987). Forecasting and testing in co-integrated systems. *Journal of econometrics*, 35(1), 143-159.
5. Gómez-Pineda, J. G., & Julio-Román, J. M. (2000). An estimation of the nonlinear Phillips curve in Colombia. *Borradores de Economía*; No. 160.
6. Harvey, A. C. (1990). Forecasting, structural time series models and the Kalman filter.
7. Junguito, R., & Rincón, H. (2004). La política fiscal en el siglo XX en Colombia. *Borradores de economía*, 318.
8. International Monetary Fund (2023). Identifying Recent Inflation Drivers in Colombia.
9. MacKinnon, J. G. (1996). Numerical distribution functions for unit root and cointegration tests. *Journal of applied econometrics*, 11(6), 601-618.
10. Nigrinis-Ospina, M. (2004). ¿ Es lineal la curva de Phillips en Colombia?. *Borradores de Economía*; No. 282.
11. Pesaran, M. H., Shin, Y., & Smith, R. J. (2001). Bounds testing approaches to the analysis of level relationships. *Journal of applied econometrics*, 16(3), 289-326.

Anexos

Anexo 1 – Pruebas de raíz unitaria

A continuación se presentan los resultados de las pruebas de raíz unitaria de Zivot & Andrews aplicados a las series del PIB, recaudo por resto de impuestos y recaudo por cuotas de renta.

Prueba de Zivot & Andrews – PIB

Como se muestra en la Tabla A1, en la prueba de Zivot & Andrews se encuentra un punto de quiebre en la observación número 6. No obstante, lo que llama la atención es que al 5% de significancia, la serie del PIB nominal 1987-2023 es estacionaria, lo cual resulta ser, por lo menos, llamativo y poco intuitivo. La única manera de poder llevar a cabo el análisis de cointegración es trabajando a un nivel de significancia del 1% para no rechazar la hipótesis nula de no-estacionariedad.

Tabla A1. Resultados prueba de Zivot & Andrews - PIB.

Coeficiente	Estimación	SE	t	p Valor
<i>Intercepto</i>	3,77758	0,64219	5,882	1,72e-06
<i>y.l1</i>	0,77866	0,04070	19,13	2e-16
<i>Trend</i>	0,05319	0,01699	3,131	0,00378
<i>du</i>	0,08856	0,04524	1,958	0,05933
<i>dt</i>	-0,03510	0,01464	-2,937	0,02275

Valor calculado -5,4379

Significancia	1%	5%	10%
Valores críticos	-5,57	-5,08	-4,82

Fuente: DT-CARF.

Punto de quiebre: 6

Prueba de Zivot & Andrews – Retenciones y resto de impuestos

La prueba de raíz unitaria aplicada al recaudo por retenciones y resto de impuestos arroja resultados similares a los del PIB. Al 5% de significancia la serie es estacionaria, lo cual conduce a que sea necesario trabajar al 1% para no rechazar la hipótesis nula de no-estacionariedad.

Tabla A2. Resultados prueba de Zivot & Andrews – Retenciones y resto de impuestos.

Coeficiente	Estimación	SE	t	p Valor
<i>Intercepto</i>	2,83864	0,55223	5,140	1,32e-05
<i>y.l1</i>	0,79360	0,04489	17,679	2e-16
<i>Trend</i>	0,08469	0,02365	3,581	0,00112
<i>dt</i>	-0,06513	0,01923	-3,386	0,00189

Valor calculado -4,598

Significancia	1%	5%	10%
Valores críticos	-4,93	-4,42	-4,11

Fuente: DT-CARF.

Punto de quiebre: 7

Prueba de Zivot & Andrews – Cuotas de renta

Al 5% de significancia no existe evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula de no-estacionariedad en el recaudo por cuotas de renta, lo cual hace posible el análisis de cointegración.

Tabla A3. Resultados prueba de Zivot & Andrews – Cuotas de renta.

Coefficiente	Estimación	SE	t	p Valor
<i>Intercepto</i>	8,39168	1,92401	4,362	0,000126
<i>y.l1</i>	0,31109	0,16396	1,897	0,066841
<i>Trend</i>	0,11792	0,03277	3,599	0,001065
<i>dt</i>	-0,05112	0,02429	-2,104	0,043287

Valor calculado -4,2016

Significancia	1%	5%	10%
Valores críticos	-4,93	-4,42	-4,11

Fuente: DT-CARF.

Punto de quiebre: 19

De lo anterior se concluye que al 1% de significancia estadística, las series de PIB nominal y recaudo por resto de impuestos son no-estacionarias. Se prosigue al análisis de cointegración teniendo la precaución de estos resultados y esperando avanzar en un análisis posterior frente al comportamiento de estas series.

Anexo 2 – Pruebas de ruido blanco

i. Modelo para retenciones y resto de impuestos

Tomando los errores de esta segunda etapa y aplicando el test de Ljung-Box¹² para evaluar ruido blanco se tiene:

Tabla A4. Resultados prueba de Ljung-Box.

Rezagos	Valor crítico	Estadístico	p Valor
5	11,0705	0,7451	0,9804
10	18,3070	6,1806	0,7999

¹² La hipótesis nula de la prueba de Ljung-Box es que los errores del modelo son ruido blanco.

Rezagos	Valor crítico	Estadístico	p Valor
15	24,9958	10,5725	0,7823

Fuente: cálculos propios.

Los resultados anteriores sugieren que los errores de la segunda etapa son ruido blanco.

ii. Modelo para cuotas de renta

Tomando los errores de esta segunda etapa y aplicando el test de Ljung-Box para evaluar ruido blanco se tiene:

Tabla A5. Resultados prueba de Ljung-Box.

Rezagos	Valor crítico	Estadístico	p Valor
5	11,0705	2,9494	0,7078
10	18,3070	9,0425	0,5281
15	24,9958	10,5466	0,7840

iii. Fuente: cálculos propios.

Los resultados anteriores sugieren que los errores de la segunda etapa son ruido blanco.

Anexo 3 – Pruebas de normalidad

i. Modelo para retenciones y resto de impuestos

Aplicando la prueba de normalidad de Jarque-Bera, a los errores de la primera etapa se tiene:

Tabla A6. Prueba de Jarque-Bera.

Estadístico	Valor crítico	p Valor
1,2339	4,6619	0,3877

Fuente: cálculos propios.

Los errores de la primera etapa son normales, por lo cual es posible la construcción de los intervalos de confianza de la forma usual.

i. Modelo para cuotas de renta

Los errores de la primera etapa no pasan la prueba de normalidad de Jarque-Bera pero sí la prueba de Lilliefors¹³:

Tabla A7. Prueba de Lilliefors.

Estadístico	Valor crítico	p Valor
0,1393	0,1438	0,0655

Fuente: cálculos propios.

De lo anterior se concluye que los errores de la primera etapa del modelo de cuotas de renta pasan la prueba de normalidad.

¹³ Al igual que en la prueba de Jarque-Bera, la hipótesis nula de la prueba de Lilliefors es normalidad.

Anexo 4 – Modelo ARDL

La DT-CARF ha comenzado la exploración de otras metodologías econométricas que sean apropiadas para la estimación de las elasticidades de recaudo a PIB. A continuación se presentarán los resultados de las estimaciones de las elasticidades bajo la metodologías ARDL (Autoregressive Distributed Lag) propuesta en Pesaran et al. (2001).

La metodología ARDL es un enfoque en donde se aprovecha la idea de que la cointegración entre variables no-estacionarias es equivalente a un proceso de corrección de error, EC. Es decir, el modelo ARDL permite estudiar la relación de largo plazo entre variables que pueden ser integradas de cualquier orden. Formalmente, el modelo ARDL(p,q) será:

$$y_t = c_0 + c_1 t + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \beta_i x_{t-i} + \gamma z_t + u_t \quad (A1)$$

Con y_t la variable dependiente, x_t la variable independiente, z_t es un regresor independiente que debe ser $I(0)$ debido a que solo explica el corto plazo y no hace parte del vector de cointegración, u_t debe ser ruido blanco. Por otra parte, los rezagos (p,q) deben ser determinados a partir de criterios de información. El modelo de corrección de error está dado por:

$$\Delta y_t = c_0 + c_1 t - \alpha(y_{t-1} - \theta x_{t-1}) + \sum_{i=1}^p \psi_{y_i} \Delta y_{t-i} + \omega' \Delta x_t + \sum_{i=1}^q \psi_{x_i} \Delta x_{t-i} + \gamma z_t + u_t \quad (A2)$$

Luego se realiza la prueba de Pesaran et al. (2001) en donde la hipótesis nula es que no existe relación en niveles entre las variables, con lo cual no existiría cointegración entre las variables.

A continuación se presentan los resultados de las estimaciones de las elasticidades bajo la metodología ARDL.

Modelo de retenciones y resto de impuestos

La Tabla A8 muestra los resultados de la estimación de la elasticidad de retenciones y resto de impuestos.

Tabla A8. Elasticidad de retenciones y resto.

Estimación	SE	t	p Valor
1,297684	0,0656759	19,76	0

Fuente: DT-CARF.

Tabla A9. Intervalo de confianza de la elasticidad de retenciones y resto de impuestos.

Cota inferior (95%)	Estimación puntual	Cota superior (95%)
1,163737	1,297684	1,431631

Fuente: cálculos propios.

La estimación de la elasticidad arroja un valor de 1,298. Adicionalmente, el valor F calculado es de 5,809 el cual se debe comparar con los valores críticos de la prueba de Pesaran et al. (2001) que se presentan a continuación:

Tabla A10. Valores críticos.

Significancia	10%		5%		1%	
Integración	I_0	I_1	I_0	I_1	I_0	I_1
Valor crítico	4,05	4,49	4,68	5,15	6,10	6,73

Fuente: DT-CARF.

El valor calculado, 5,809, está a la derecha del valor crítico para las series I_1 al nivel de significancia del 5%, con lo cual se puede rechazar la hipótesis nula y se concluye que las series de resto y PIB están cointegradas.

Modelo de cuotas de renta

La Tabla A11 muestra los resultados de la estimación de la elasticidad de cuotas de renta.

Tabla A11. Elasticidad de cuotas de renta.

Estimación	SE	t	p Valor
0,8169058	0,11948	6,84	0

Fuente: DT-CARF.

Tabla A12. Intervalo de confianza de la elasticidad de cuotas de renta.

Cota inferior (95%)	Estimación puntual	Cota superior (95%)
0,5728951	0,8169058	1,060917

Fuente: cálculos propios.

La estimación de la elasticidad arroja un valor de 0,817. Adicionalmente, el valor F calculado es de 18,622 el cual se debe comparar con los valores críticos de la prueba de Pesaran et al. (2001).

Tabla A13. Valores críticos.

Significancia	10%		5%		1%	
Integración	I_0	I_1	I_0	I_1	I_0	I_1
Valor crítico	4,05	4,49	4,68	5,15	6,10	6,73

Fuente: DT-CARF.

El valor F calculado de 18,622 es superior al valor crítico para las series I_1 al nivel de significancia del 5%, con lo cual se puede rechazar la hipótesis nula y se concluye que el recaudo por cuotas y el PIB están cointegrados.

Anexo 5 – Algoritmo de estimación de las variables no-observables

Filtro de Kalman

El algoritmo comienza con valores iniciales para los estados, $x_{0|0}$, la matriz inicial de varianzas y covarianzas del estado $P_{0|0}$ y valores iniciales para todos los parámetros, θ_0 , tal que:

1. Se estima para $t = 1, \dots, T$:
 - Las proyecciones un periodo adelante del vector de estado para el periodo t , $\hat{x}_{t|t-1}$ y su matriz de varianzas y covarianzas $P_{t|t-1}$.

- Las proyecciones un periodo adelante del vector de observables en el periodo t , $\hat{y}_{t|t-1}$ y su matriz de varianzas y covarianzas $V_{t|t-1}$.
 - Los estados filtrados para el periodo t , $\hat{x}_{t|t-1}$ y su matriz de varianzas y covarianzas $P_{t|t}$.
2. Se introducen las estimaciones pronosticadas y filtradas en la función de verosimilitud de los datos:

$$\ln p(y_T, \dots, y_1) = \sum_{t=1}^T \ln \varphi(y_t; \hat{y}_{t|t-1}, V_{t|t-1}) \quad (A3)$$

Con $\varphi(y_t; \hat{y}_{t|t-1}, V_{t|t-1})$ la función de densidad de probabilidad normal multivariada con media $\hat{y}_{t|t-1}$ y varianza $V_{t|t-1}$.

3. Se introduce este procedimiento en un optimizador para maximizar la probabilidad con respecto a los parámetros del modelo.

Finalmente, todas las variables que entran en el modelo son $I(0)$.

Parámetros iniciales del modelo

Para los parámetros iniciales del modelo, se considera el siguiente procedimiento:

- Se proporciona una “semilla” de los parámetros para los algoritmos numéricos.
- Se evalúan 5 algoritmos: (1). Loose bound interior point, (2). Nelder-Mead algorithm, (3). Quasi-Newton, (4). Starting value perturbation y (5). Starting value shrinkage.
- Se toman los parámetros que provienen del algoritmo que maximiza la función de verosimilitud.

Anexo 6 – Modelo de la NAICU

En el modelo de la NAICU, la ecuación de media se puede expresar de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mu_t \\ \pi_t^b \\ \pi_{t-1}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_t^* \\ \hat{\mu}_t \\ \hat{\mu}_{t-1} \\ \pi_t^b \\ \pi_{t-1}^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d_t + \begin{bmatrix} \varrho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A4)$$

Con μ_t la utilización de capacidad instalada, μ_t^* la NAICU, $\hat{\mu}_t$ la brecha de utilización de capacidad instalada, d_t una variable dummy que toma el valor de 1 para los trimestres 1 y 2 de 2020 y 0 en caso contrario, ϵ_t las innovaciones en el modelo de observables que debe ser ruido blanco, π_t^b la inflación básica y π_{t-1}^M la inflación de importados. El sistema anterior es equivalente, en forma general, al sistema:

$$y_t = Cx_t + (z\theta)' + D\epsilon_t \quad (A5)$$

Donde y_t es el vector de variables observables, x_t es el vector de estado que puede contener tanto variables no-observables como observables, C es la matriz de medida o sensibilidad, z un vector de predictores, θ el vector de coeficientes de los regresores z , D es la matriz de

observación-innovación que describe cómo se combinan las observaciones en el periodo t con las innovaciones de ese mismo periodo y ϵ_t son las innovaciones ruido blanco gaussianas del vector de observables.

La ecuación de transición del sistema puede ser representada de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mu_t^* \\ \hat{\mu}_t \\ \hat{\mu}_{t-1} \\ \pi_t^b \\ \pi_{t-1}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{t-1}^* \\ \hat{\mu}_{t-1} \\ \hat{\mu}_{t-2} \\ \pi_{t-1}^b \\ \pi_{t-2}^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varrho_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varrho_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_t^{\mu^*} \\ v_t^{\hat{\mu}} \\ 0 \\ v_t^{\pi^b} \\ v_t^{\pi^M} \end{bmatrix} \quad (A6)$$

Este sistema es equivalente, en forma general, al siguiente proceso de Markov:

$$x_t = Ax_{t-1} + Bv_t \quad (A7)$$

Donde x_t es el vector de estado en el periodo t , A es la matriz de transición de estado, B es la matriz de estado-innovación que describe cómo se combinan los estados en el periodo t con las innovaciones de ese mismo periodo y v_t los errores ruido blanco gaussianos del vector de estado.

La matriz de varianzas y covarianzas del sistema está definida como:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \quad (A8)$$

Con R y Q las matrices de varianzas y covarianzas de la ecuación de medida y transición, respectivamente. Nótese que ϵ_t y v_t no deben estar correlacionados. Formalmente, $R = DD'$ y $Q = BB'$.

La Tabla A14 muestra los resultados de las estimaciones de los parámetros del modelo de la NAICU.

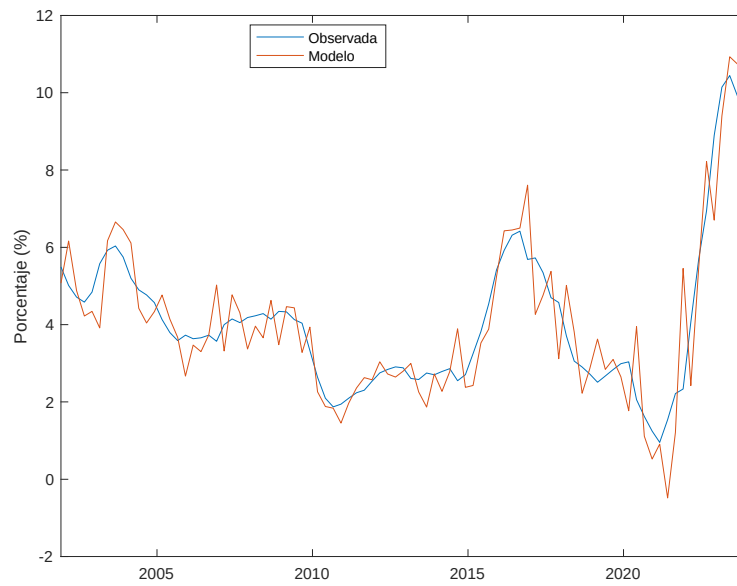
Tabla A14. Resultados estimaciones parámetros modelo NAICU.

Coefficiente	Estimación	SE	t
θ	-19,10849	1,14623	-16,67079
α_1	1,67308	0,21247	7,87446
α_2	-0,83159	0,20690	-4,01926
α_3	0,29170	0,11715	2,48994
α_4	0,95559	0,02744	34,83015
α_5	0,03653	0,00989	3,69206
α_6	0,87858	0,05674	15,48473
ϱ_1	-2,16483	0,11262	-19,22270
ϱ_2	-0,72631	0,32781	-2,21564
ϱ_3	-0,31019	0,24585	-1,26168
ϱ_4	0,24410	0,02099	11,62887
ϱ_5	3,99643	0,26470	15,09820

Fuente: DT-CARF.

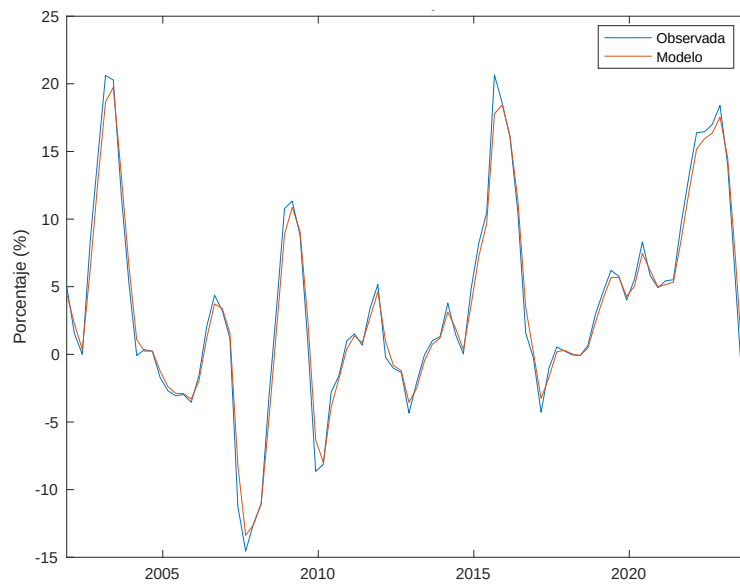
Dadas las estimaciones anteriores, los Gráficos A1 y A2 muestran el ajuste del modelo a las dos variables observables del modelo en la ecuación de transición, inflación básica e inflación de importados, respectivamente.

Gráfico A1. Inflación básica



Fuente: Banco de la República y cálculos propios.

Gráfico A2. Inflación de importados



Fuente: Banco de la República y cálculos propios.

Anexo 7 – Modelo 1 de la NAIRU

En el modelo de la NAIRU, la ecuación de media se puede expresar de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} u_t \\ \pi_t \\ \pi_{t-1} \\ s_t \\ s_{t-1} \\ \pi_t^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_t^* \\ \hat{u}_t \\ \hat{u}_{t-1} \\ \pi_t \\ \pi_{t-1} \\ s_t \\ s_{t-1} \\ \pi_t^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vartheta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_t^u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A9)$$

Con u_t la tasa de desempleo, u_t^* la NAIRU, $\hat{u}_t$ la brecha del desempleo, ϵ_t^u las innovaciones en el modelo de observables que debe ser ruido blanco, π_t la inflación total, s_t los choques de oferta y π_t^M la inflación de importados. El sistema anterior es equivalente, en forma general, al sistema:

$$y_t = Cx_t + D\epsilon_t \quad (A10)$$

Donde y_t es el vector de variables observables, x_t es el vector de estado que puede contener tanto variables no-observables como observables, C es la matriz de medida o sensibilidad, D es la matriz de observación-innovación que describe cómo se combinan las observaciones en el periodo t con las innovaciones de ese mismo periodo y ϵ_t son las innovaciones ruido blanco gaussianas del vector de observables.

La ecuación de transición del sistema puede ser representada de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} u_t^* \\ \hat{u}_t \\ \hat{u}_{t-1} \\ \pi_t \\ \pi_{t-1} \\ s_t \\ s_{t-1} \\ \pi_t^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 0 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_9 & \beta_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{t-1}^* \\ \hat{u}_{t-1} \\ \hat{u}_{t-2} \\ \pi_{t-1} \\ \pi_{t-2} \\ s_{t-1} \\ s_{t-2} \\ \pi_{t-1}^M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vartheta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_t^{u^*} \\ v_t^{\hat{u}} \\ 0 \\ v_t^{\pi} \\ 0 \\ v_t^s \\ 0 \\ v_t^{\pi^M} \end{bmatrix} \quad (A11)$$

Este sistema es equivalente, en forma general, al siguiente proceso de Markov:

$$x_t = Ax_{t-1} + Bv_t \quad (A12)$$

Donde x_t es el vector de estado en el periodo t , A es la matriz de transición de estado, B es la matriz de estado-innovación que describe cómo se combinan los estados en el periodo t con las innovaciones de ese mismo periodo y v_t los errores ruido blanco gaussianos del vector de estado.

La matriz de varianzas y covarianzas del sistema está definida como:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \quad (A13)$$

Con R y Q las matrices de varianzas y covarianzas de la ecuación de medida y transición, respectivamente. Nótese que ϵ_t y v_t no deben estar correlacionados. Formalmente, $R = DD'$ y $Q = BB'$.

La Tabla A15 muestra los resultados de las estimaciones de los parámetros del modelo de la NAICU.

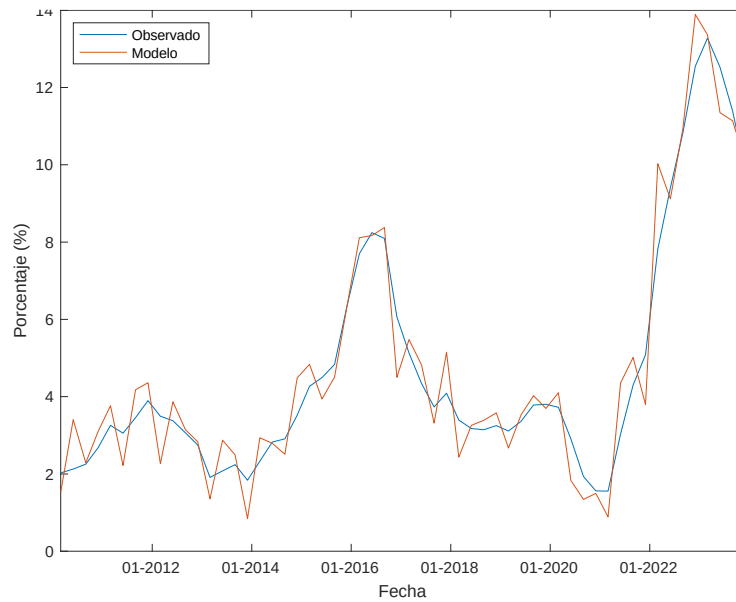
Tabla A15. Resultados estimaciones parámetros modelo NAIRU.

Coeficiente	Estimación	SE	t
β_1	0,99478	0,02856	34,82864
β_2	0,72929	0,34353	2,12296
β_3	-0,93781	1,96925	-0,47622
β_4	0,97932	0,34295	2,85559
β_5	-0,08099	0,35109	-0,23069
β_6	-0,02581	0,09645	-0,26763
β_7	1,44348	0,15934	9,05924
β_8	-0,00868	0,10056	-0,08635
β_9	-0,56070	0,16495	-3,39914
β_{10}	0,10039	0,04975	2,01788
β_{11}	0,89239	0,07330	12,17444
ϑ_1	0,39655	0,93753	0,42297
ϑ_2	1,32504	0,34949	3,79133
ϑ_3	0,38268	0,68642	0,55750
ϑ_4	-0,36839	0,27539	-1,33769
ϑ_5	1,71115	0,30184	5,66905
ϑ_6	3,72719	0,34415	10,83007

Fuente: DT-CARF.

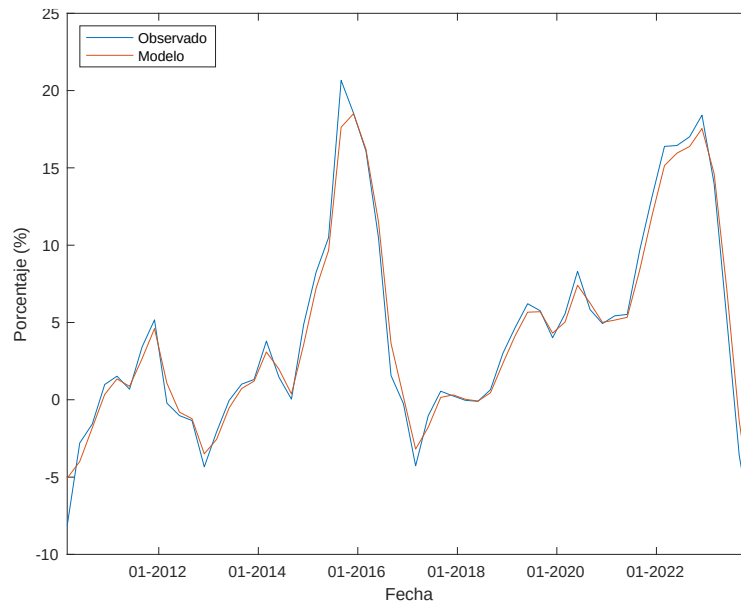
Dadas las estimaciones anteriores, los Gráficos A3, A4 y A5 muestran el ajuste del modelo a las tres variables observables del modelo en la ecuación de transición, inflación, inflación de importados y choques de oferta, respectivamente.

Gráfico A3. Inflación total



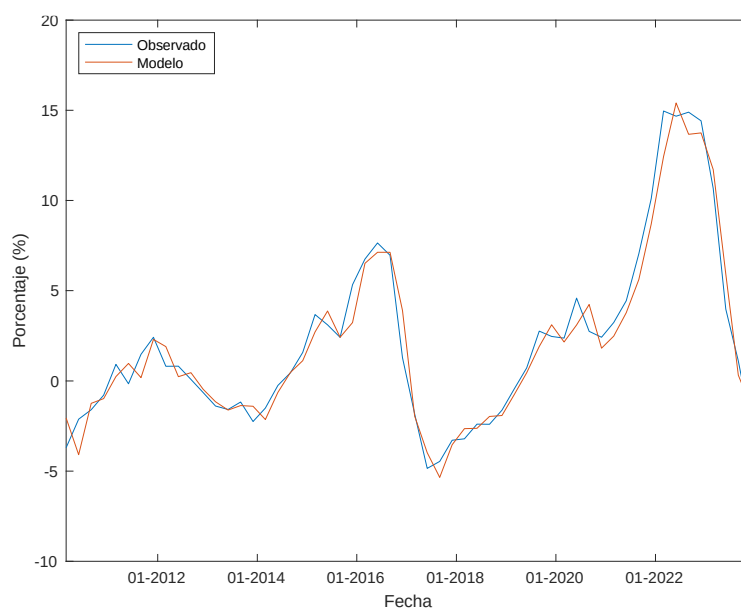
Fuente: Banco de la República y cálculos propios.

Gráfico A4. Inflación de importados



Fuente: Banco de la República y cálculos propios.

Gráfico A5. Choques de oferta



Fuente: cálculos propios.

Anexo 8 – Modelo 2 de la NAIRU

La Tabla A16 muestra los resultados de la regresión de la ecuación 35.

Tabla A16. Resultados estimaciones parámetros modelo 2 NAIRU.

Coeficiente	Estimación	SE	t	p Valor
α_0	0,0054629	0,01845	0,29609	0,76742
α	-0,042667	0,024456	-1,7446	0,082322

Fuente: DT-CARF.



@CARFColombia



@carf.colombia



Comité Autónimo
de la Regla Fiscal

Comité Autónimo de la Regla Fiscal - CARF
Carrera 8 No. 6 C 38 - Código Postal 111711
atencionusuario@carf.gov.co
Bogotá, D.C.
www.carf.gov.co